國立成功大學 航空太空工程研究所

NATIONAL CHENG KUNG UNIVERSITY
DEPARTMENT OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

高等動力學期末專題

Advanced Dynamics Final Project

學生：李洋銳 (P46081291)
Yang-Rui, Li

指導教授：林穎裕 教授
Dr. Yiing-Yuh, LIN

2020 年 06 月 29 日

1 簡介

物體在空間中的方向稱為「姿態」(Attitude)，而姿態的描述則是藉由一組「姿態角」(Attitude angle) 來達成。其中，姿態角又稱為「尤拉角」(Eulerian angle)。對於飛行載具而言，如何藉由控制力矩的輸入，來使得載具達到特定的姿態，是一個重要的課題。實際應用列舉如下：

- 對於通訊衛星而言，常常需要面對地面的某一個方位；對於觀測衛星而言（例如：哈伯望遠鏡），需要面對某一星系。意即：在軌道運行中，追蹤某一期望姿態。
- 飛機在巡航當中，希望維持穩定飛行，即：維持穩定水平姿態。
- 四旋翼機需要藉由俯仰角與滾轉角來達成平面運動，需要偏航角來改變方向。

在上述例子當中，皆需要進行姿態的穩定或追蹤控制。本專題致力於設計基於反應輪驅動的太空載具姿態控制，主要方法援引自 [1]。其動態構型參考圖 1，控制的目標是希望藉由反應輪的驅動，將系統的角動量 $\vec{H}_T$ 逐漸轉移至 $\vec{H}_{3P} + \vec{h}_w$。

關於此份專題，第 2 節將推導包含反應輪角動量之轉動動態方程式；第 3 節會針對所提出的運動方程，進行穩定性分析與控制器設計；第 4 節將考慮不同轉動慣量的情況下，系統於開迴路及閉迴路的響應。最後，結論於第 5 節。模擬的結果表示，文中所示的反應輪控制律可成功地將系統的角動量逐漸轉移至體座標 k 軸。

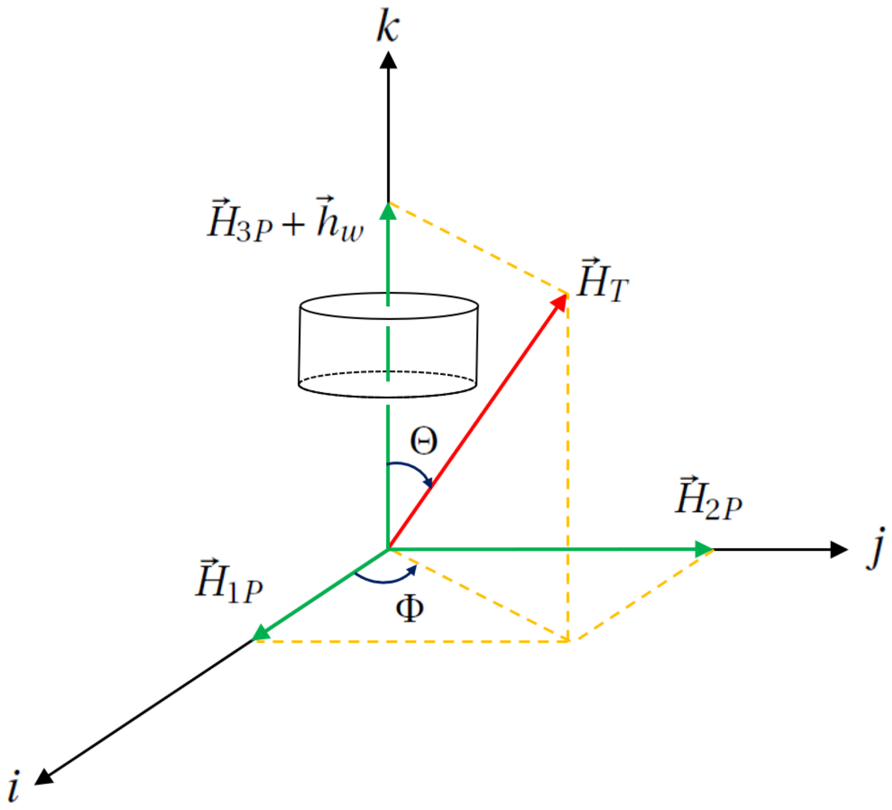

圖 1：具有反應輪機構的太空載具構型圖及其坐標系定義。

2 姿態動力學

考慮如圖 1 示的構型，其中，(i, j, k) 為固定於太空船的主軸坐標系（體固坐標系）。令太空船本體的轉動慣量 $I_G = \mathrm{diag}([I_1, I_2, I_3])$，角速度 $\vec{\omega} = \omega_1\, i + \omega_2\, j + \omega_3\, k$，則太空船本體的角動量為

$$\vec{H}_P = I_G \vec{\omega} = I_1\omega_1\, i + I_2\omega_2\, j + I_3\omega_3\, k \triangleq H_{1P}\, i + H_{2P}\, j + H_{3P}\, k \tag{1}$$

反應輪的方向沿著 k 軸，令 Ω 為反應輪相對於太空船本體的轉速，I_w 為反應輪軸向的轉動慣量，則其角動量為

$$\vec{h}_w = I_w(\omega_3 + \Omega)\, k \triangleq h_w\, k \tag{2}$$

在這裡要注意的是，反應輪側向的轉動慣量將會併入 I_G。系統（太空船本體及反應輪）的總角動量為

$$\begin{aligned} \vec{H}_T &= \vec{H}_P + \vec{h}_w \\ &= H_{1P}\, i + H_{2P}\, j + (H_{3P} + h_w)\, k \end{aligned} \tag{3}$$

並且 $H_T^2 = H_{1P}^2 + H_{2P}^2 + (H_{3P} + h_w)^2$，其中 $H_T = |\vec{H}_T|$。

考慮太空船所在環境的擾動非常小，所以可以忽略。基於這個假設，$\vec{H}_T$ 將會守恆，並且，其時間導數為

$$\frac{d}{dt}\vec{H}_T = (\dot{\vec{H}}_T)_B + \vec{\omega} \times \vec{H}_T = 0 \tag{4}$$

其中，$(\dot{\vec{H}}_T)_B$ 表示 $\vec{H}_T$ 於體坐標下的大小時變率。接下來，將 (4) 展開為分量形式

$$\dot{H}_{1P} = \Delta_{23} H_{2P} H_{3P} - \frac{H_{2P}}{I_2} h_w \tag{5}$$

$$\dot{H}_{2P} = \Delta_{31} H_{3P} H_{1P} + \frac{H_{1P}}{I_1} h_w \tag{6}$$

$$\dot{H}_{3P} = \Delta_{12} H_{1P} H_{2P} - \dot{h}_w \tag{7}$$

其中

$$\Delta_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}, \quad \Delta_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}, \quad \Delta_{12} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}$$

此外，參考圖 1，$\vec{H}_T$ 可根據幾何關係表示如下

$$H_{1P} = H_T \sin\Theta \cos\Phi \tag{8}$$

$$H_{2P} = H_T \sin\Theta \sin\Phi \tag{9}$$

$$H_{3P} = H_T \cos\Theta - h_w \tag{10}$$

其中，Θ 稱為章動角 (Nutation angle)；Φ 稱為進動角 (Precession angle)。在式 (5)–(7) 中，$\dot{h}_w$ 為控制輸入，吾人將設計 $\dot{h}_w$ 使得系統能夠達到控制目標，控制器設計請見第 3 節。

3 控制器設計與分析

在引入控制律之前，吾人先行對系統進行穩定性分析。考慮具有如下形式的 Lypaunov 函數

$$V = \frac{1}{2}(H_T - H_{3P} - h_w)^2 + \frac{1}{2}(H_{1P}^2 + H_{2P}^2) \tag{11}$$

其中，$\dot{V} \geq 0$。對式 (11) 微分可得

$$\dot{V} = -(H_T - H_{3P} - h_w)(\dot{H}_{3P} + \dot{h}_w) + H_{1P}\dot{H}_{1P} + H_{2P}\dot{H}_{2P} \tag{12}$$

將式 (5)–(7) 代入式 (12) 並化簡得

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -(H_T - H_{3P} - h_w)\Delta_{12} H_{1P} H_{2P} + H_{1P}(\Delta_{23} H_{2P} H_{3P} - \frac{H_{2P}}{I_2} h_w) \\
& + H_{2P}(\Delta_{31} H_{3P} H_{1P} + \frac{H_{1P}}{I_1} h_w) \\
= & -\Delta_{12} H_{1P} H_{2P} H_T + H_{1P} H_{2P} H_{3P}(\Delta_{12} + \Delta_{23} + \Delta_{31}) + H_{1P} H_{2P} h_w (\Delta_{12} - \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_1}) \\
= & -\Delta_{12} H_{1P} H_{2P} H_T
\end{aligned} \tag{13}$$

當 H_T 為正常數，式 (13) 表示當 $\Delta_{12} H_{1P} H_{2P} > 0$ 時則有 $\dot{V} < 0$ 。這意味著當時間趨近於無窮，H_{1P} 及 H_{2P} 會趨近於 0，而 H_{3P} 會趨近於 $H_T - h_w$。

觀察圖 1 可發現，於 $i - j$ 平面的進動角 Φ 在下列兩種情況時會滿足 $\dot{V} < 0$：

(a) 若 $\Delta_{12} > 0$，需要 $0° < \Phi < 90°$ 或 $180° < \Phi < 270°$ 使得 $H_{1P} H_{2P} > 0$。

(b) 若 $\Delta_{12} < 0$，需要 $90° < \Phi < 180°$ 或 $270° < \Phi < 360°$ 使得 $H_{1P} H_{2P} < 0$。

其中，不考慮 $\Delta_{12} = 0$ 的情況，因為在真實世界很難獲得一個絕對完美的軸對稱剛體。

所以，為了滿足穩定性條件，接下來吾人將設計控制律 $\dot{h}_w$ 使得進動角 Φ 滿足條件 (a) 或 (b)。為了獲取 Θ 及 Φ 的動態，對式 (7) 及式 (10) 微分，再引入式 (5)–(10) 並化簡得

$$\dot{\Theta} = -\Delta_{12} H_T \sin\Theta \cos\Phi \sin\Phi \tag{14}$$

$$\dot{\Phi} = (\Delta_{31} + \Delta_{12} \sin^2\Phi) H_T \cos\Theta + \frac{h_w}{I_3} \tag{15}$$

為了引入 $\dot{h}_w$，再對式 (15) 微分可得

$$\ddot{\Phi} = \Delta_{12} H_T \sin(2\Phi) \left[\frac{1}{2} H_T (\Delta_{31} + \Delta_{12} \sin^2\Phi)(1 + \cos^2\Theta) + \frac{h_w}{I_3} \cos\Theta \right] + \frac{\dot{h}_w}{I_3} \tag{16}$$

利用回授線性化的方法，設計反應輪的控制律如下

$$\dot{h}_w = -I_3(\alpha\dot{\Phi} + \Gamma) \tag{17}$$

其中，$\alpha > 0$ 為待定之設計參數，在模擬當中取值 0.5。而非線性項 Γ 定義如下

$$\Gamma = \Delta_{12} H_T \sin(2\Phi) \left[\frac{1}{2} H_T (\Delta_{31} + \Delta_{12} \sin^2\Phi)(1 + \cos^2\Theta) + \frac{h_w}{I_3} \cos\Theta \right]$$

將式 (17) 代回式 (16) 可得閉迴路系統為

$$\ddot{\Phi} + \alpha\dot{\Phi} = 0 \tag{18}$$

吾人可由閉迴路系統式 (18) 解得進動角速率為

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\Phi}(0)\exp(-\alpha t) \tag{19}$$

也就是說，在反應輪的驅動之下，太空船的進動模態將會呈現簡單的阻尼運動。此外，由式 (19) 可知進動角速率 $\dot{\Phi}$ 將會隨著時間呈現指數減衰，其減衰速率為 α。

為了滿足如前述 (a)、(b) 所討論到的穩定性條件，吾人僅在 $\dot{V} < 0$ 時啟動反應輪，其他情況下則不啟動。原因是當進動角 Φ 位於滿足 $\dot{V} < 0$ 之象限時，啟動反應輪將使得進動角速率 $\dot{\Phi}$ 逐漸減衰，並且令 Φ 盡可能地能夠位於此象限；再根據如式 (13) 所推導的穩定性結果可知，系統的 H_{1P}，H_{2P} 在此條件下將持續減少，而逐漸轉移到 H_{3P} 及 h_w，再根據幾何條件可知，Θ 會逐漸趨近於 0。

4 數值模擬結果與討論

系統的初始總角動量 $\vec{H}_{T0} = [1.4, 1.6, 0.8]$ (kg-m^2/sec^2)，而反應輪的初始角動量 $h_{w0} = 0$ (kg-m^2/sec^2)，並且其相對應的初始章動角及初始進動角分別為 $\Theta_0 = 69.38°$ 及 $\Phi_0 = 48.81°$；致動器的輸出大小受限於 $|\dot{h}_w| \le 0.05$；考慮系統於下列三種轉動慣量 I_G (kg-m^2) 下的響應：

- Case A: $I_G = \mathrm{diag}([7, 10, 12])$，相對應的模擬如圖 2–7 示。
- Case B: $I_G = \mathrm{diag}([12, 7, 10])$，相對應的模擬如圖 8–13 示。
- Case C: $I_G = \mathrm{diag}([10, 12, 7])$，相對應的模擬如圖 14–19 示。

為了方便，在後面的圖說當中 diag 將會被省略。從模擬的結果可以發現，三種情況下之控制目標 $H_{1P}, H_{2P} \to 0$，$H_{3P} + h_w \to H_T$ 皆能達到，於模擬最終時間的相關數值整理如表 1。

根據角動量守恆律，當系統對質心的外力矩和為零時，則系統的角動量會守恆。據此吾人將角動量大小作為半徑（即：$R = |\vec{H}_T|$），在三度空間畫出角動量軸 $\vec{H}_T$ 隨時間運行的軌跡及其相對應的角動量圓。圖 2、8 及 14 分別對應到 Case A, B 及 C 於開迴路系統的軌跡。圖 3、9 及 15 分別對應到 Case A, B 及 C 於閉迴路系統的軌跡。對於開迴路系統，吾人發現以下推論：

1. 角動量軸僅會繞最大或最小慣性矩主軸旋轉。
2. 若角動量軸繞最大慣性矩主軸旋轉，則旋轉方向與主軸方向一致。
3. 若角動量軸繞最小慣性矩主軸旋轉，則旋轉方向與主軸方向相反。

而對於閉迴路系統，可以再次發現在反應輪的驅動之下，皆能將角動量軸逐漸轉移至體座標 k 軸，而達到控制目標。

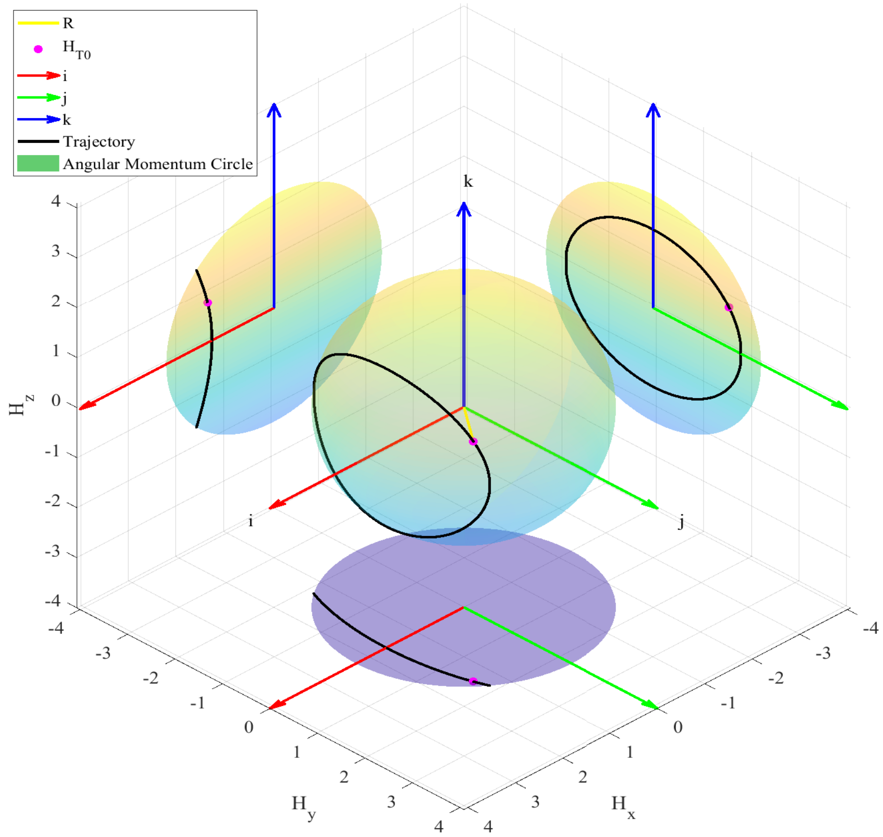

圖 2：開迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。軌跡的旋轉方向是沿 $-i$ 方向。

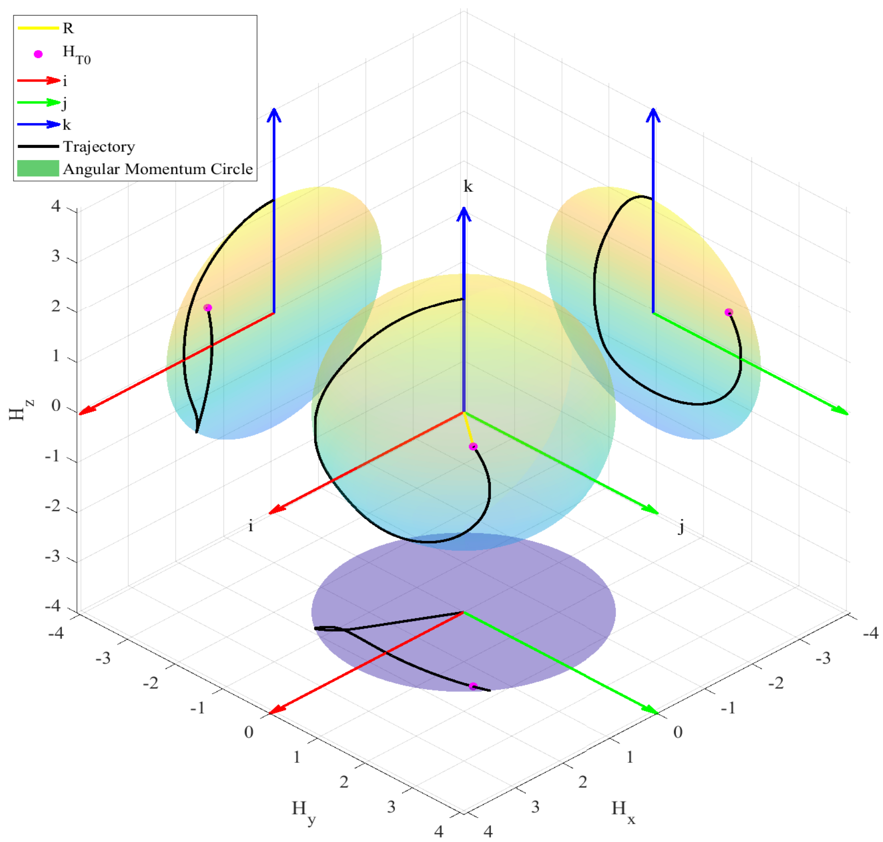

圖 3：閉迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。

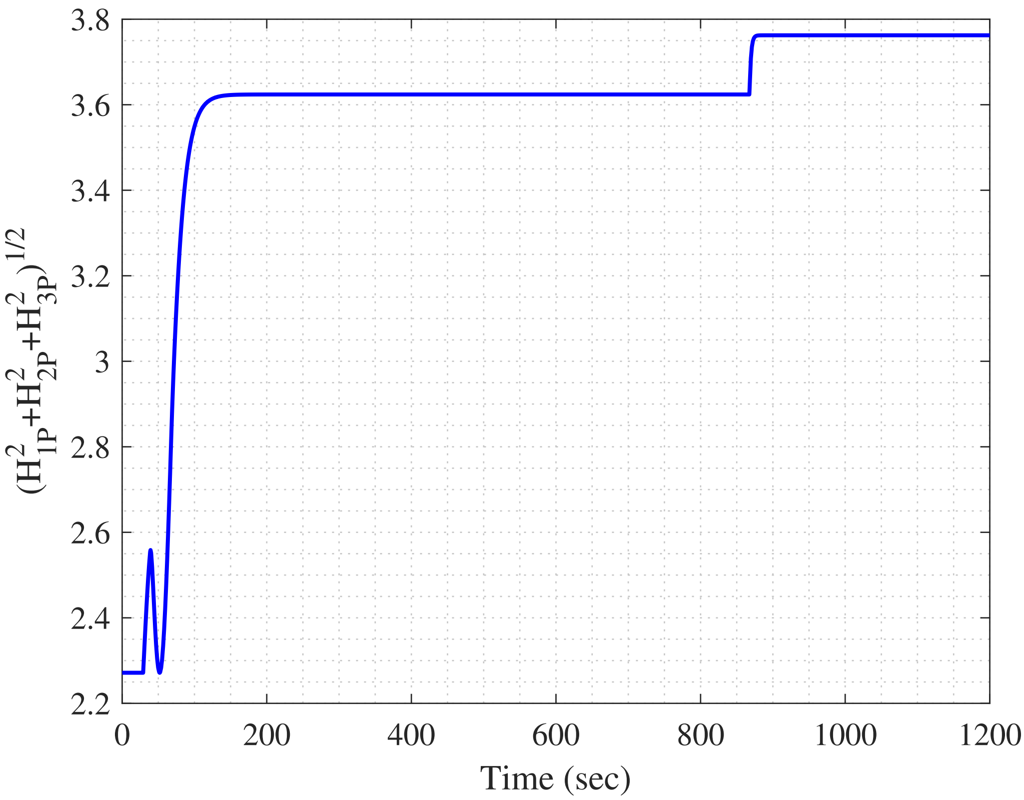

圖 4：太空船 (不含反應輪) 之角動量大小響應圖。(Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。

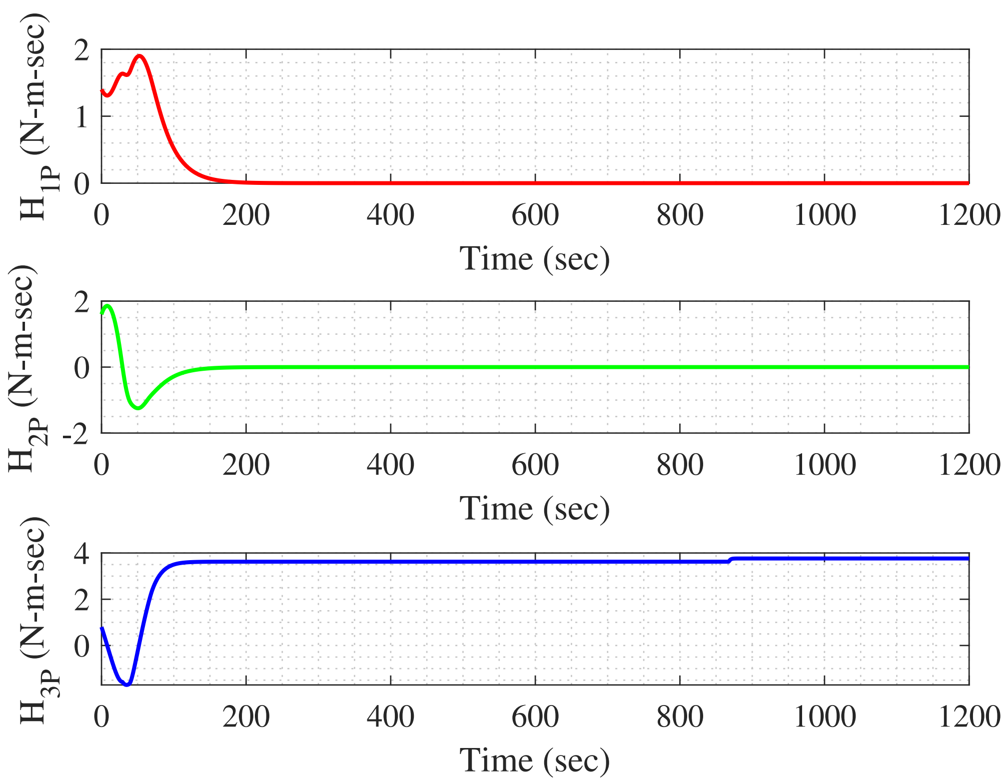

圖 5：太空船的角動量響應圖 (Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。

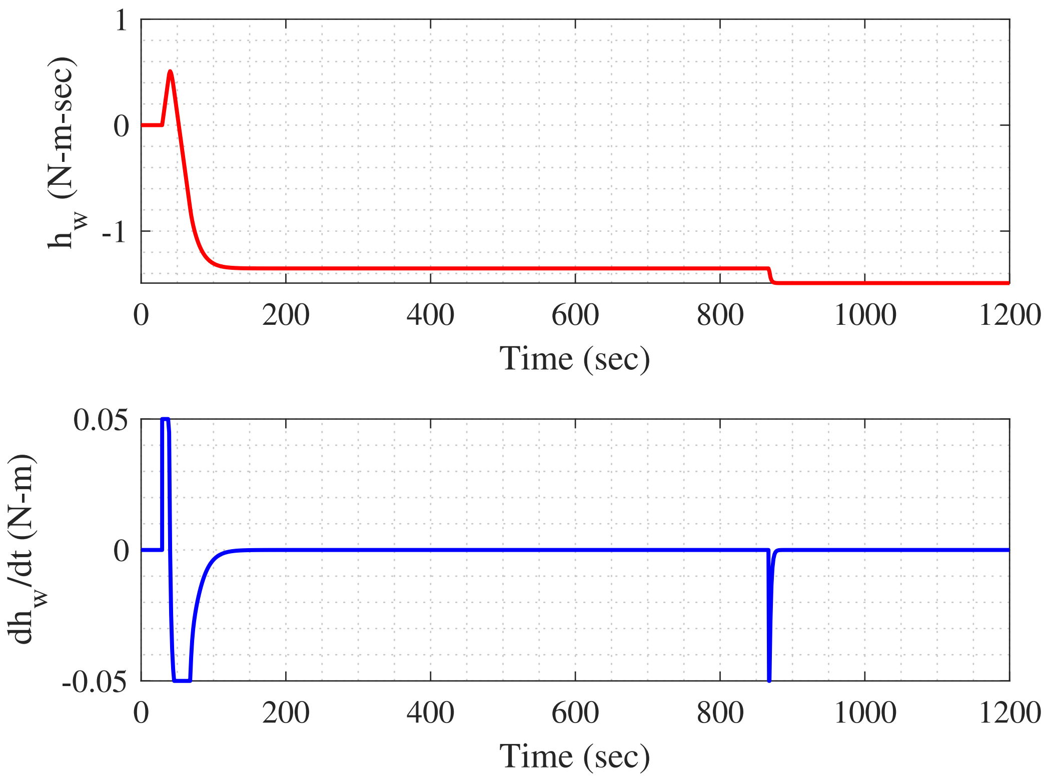

圖 6：反應輪的角動量及力矩響應圖 (Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。

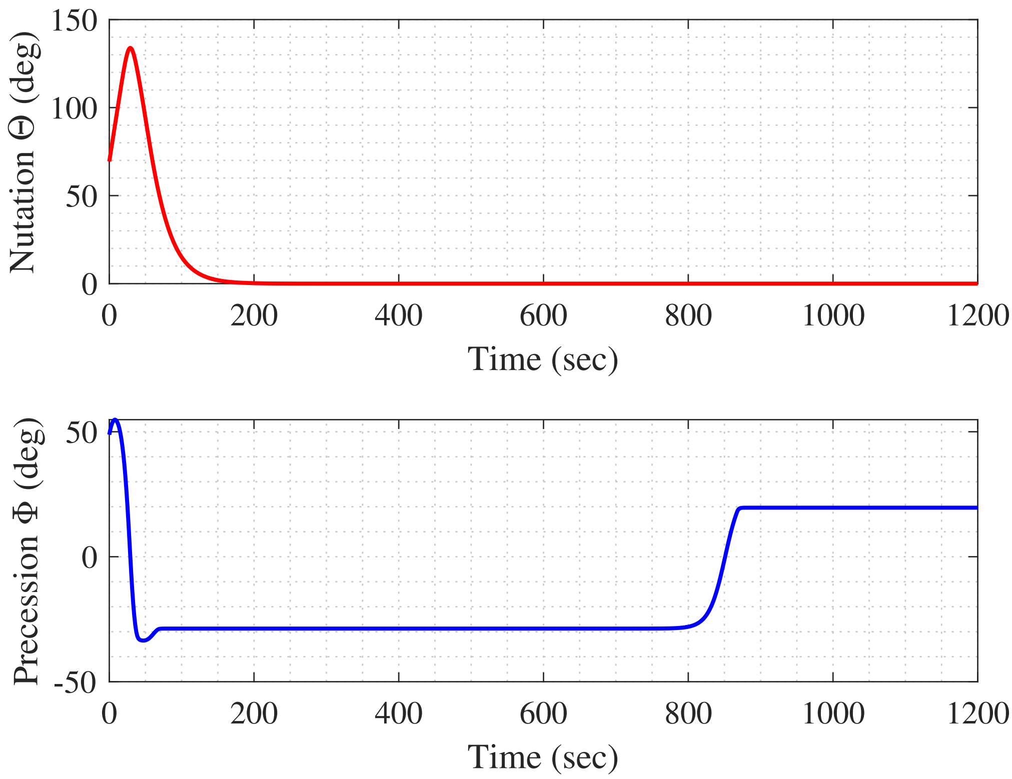

圖 7：章動角及進動角響應圖 (Case A: $I_G = [7, 10, 12]$)。

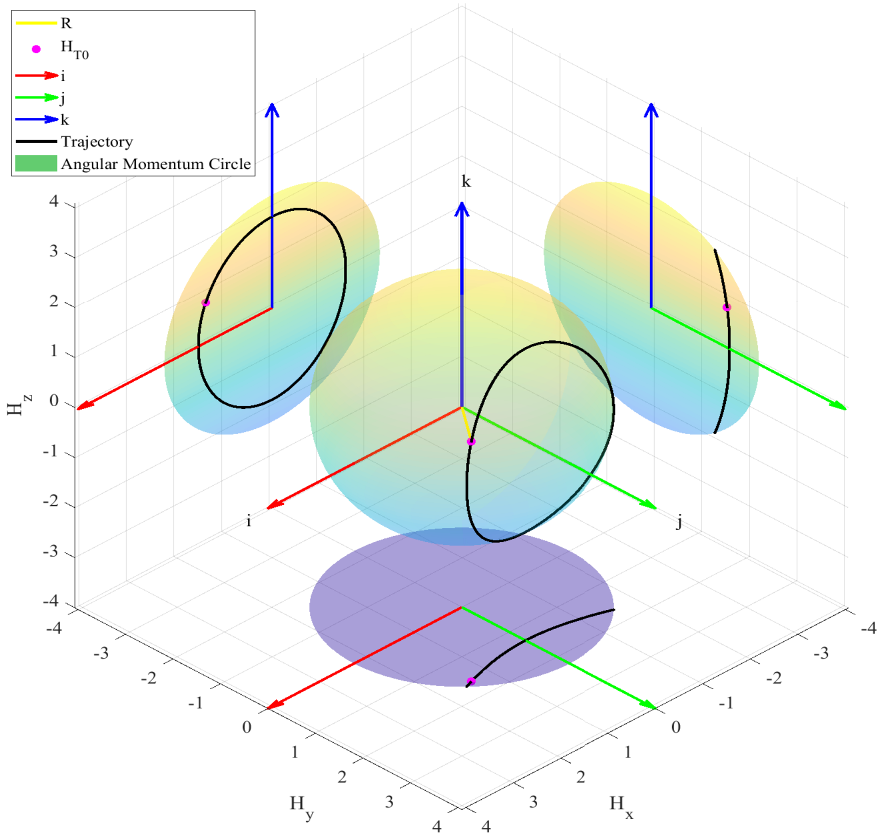

圖 8：開迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case B: $I_G = [12,7,10]$)。軌跡的旋轉方向是沿 $-j$ 方向。

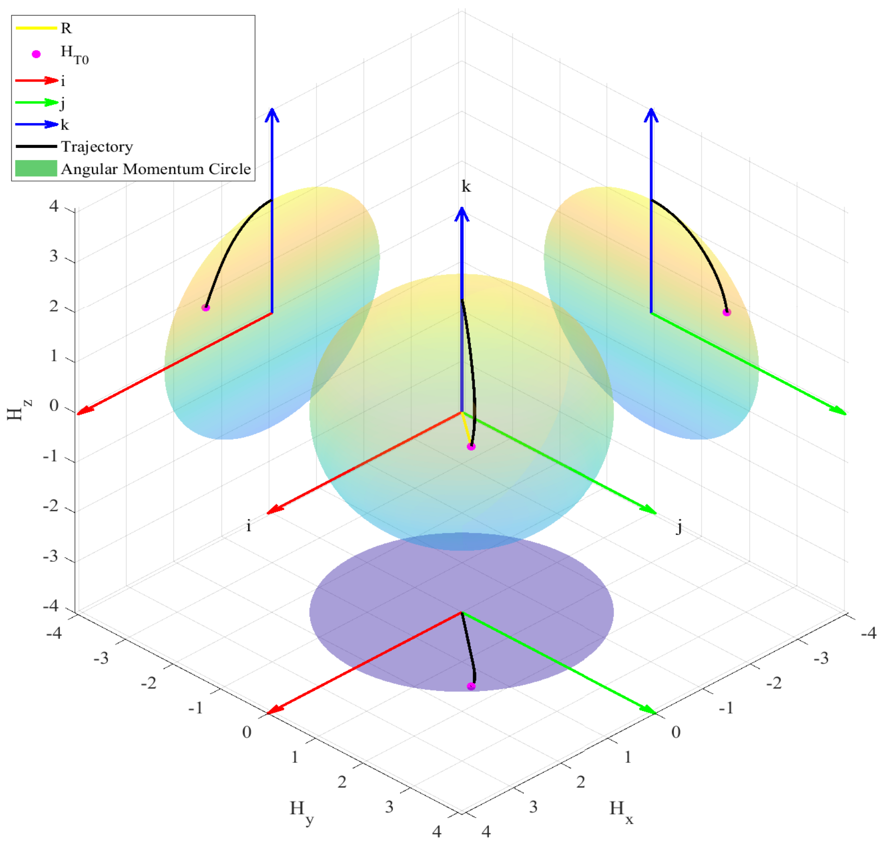

圖 9：閉迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case B: $I_G = [12,7,10]$)。

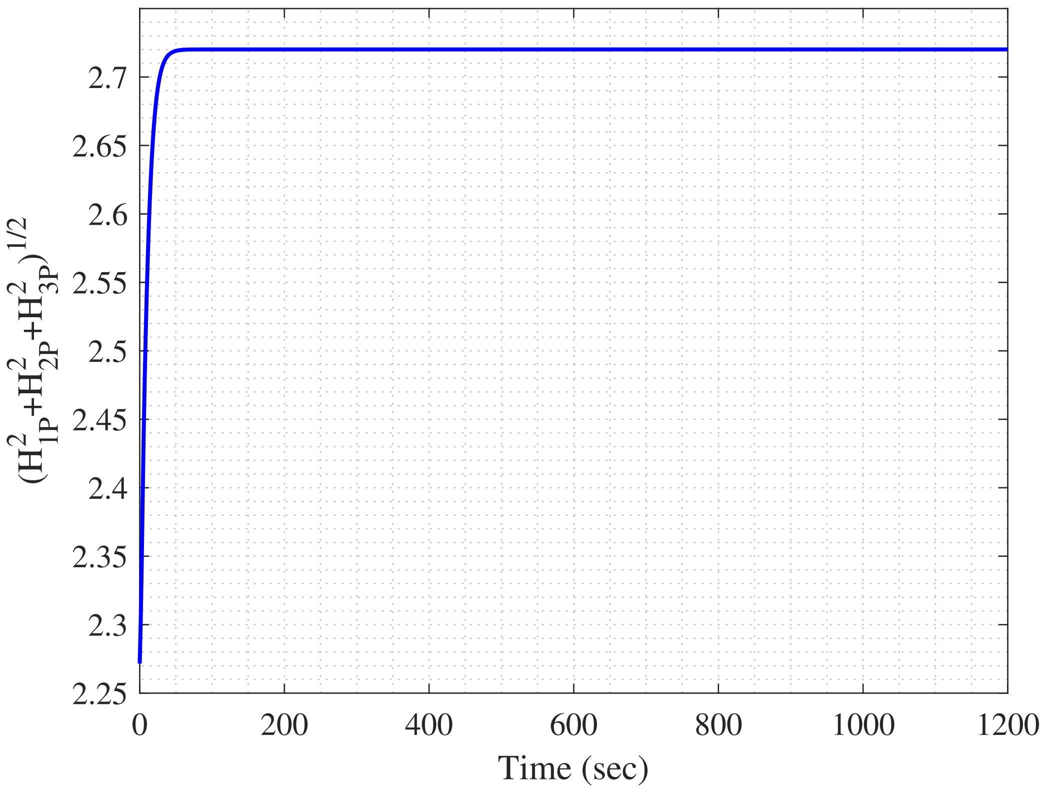

圖 10：太空船 (不含反應輪) 之角動量大小響應圖。(Case B: $I_G = [12, 7, 10]$)。

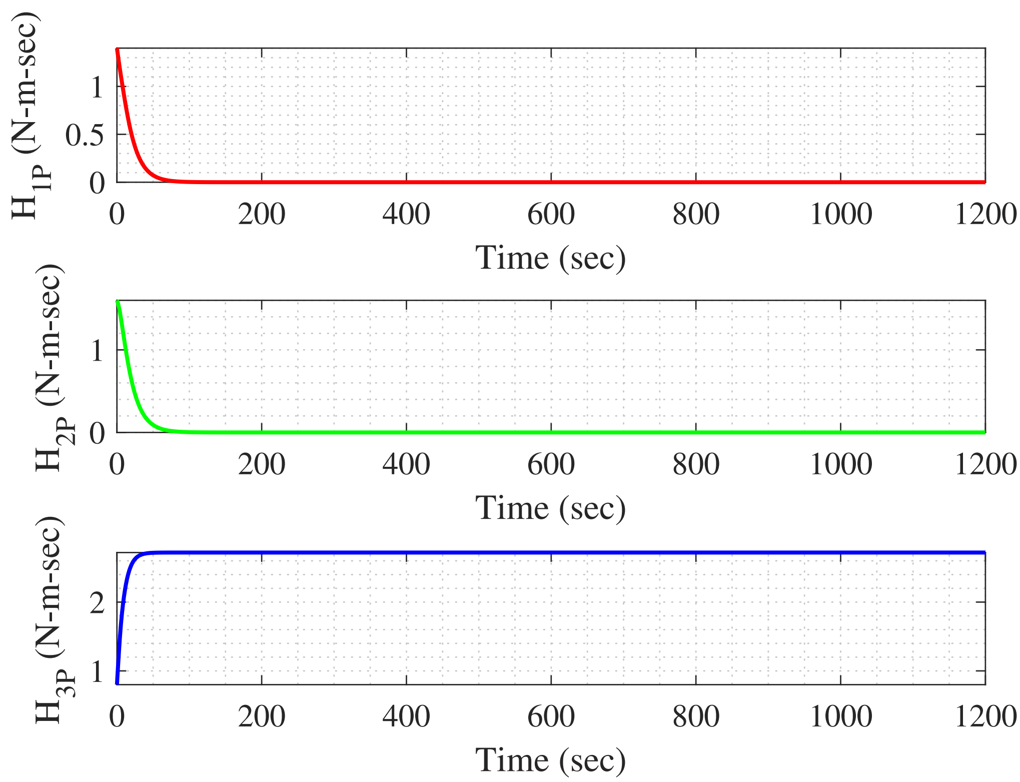

圖 11：太空船的角動量響應圖 (Case B: $I_G = [12, 7, 10]$)。

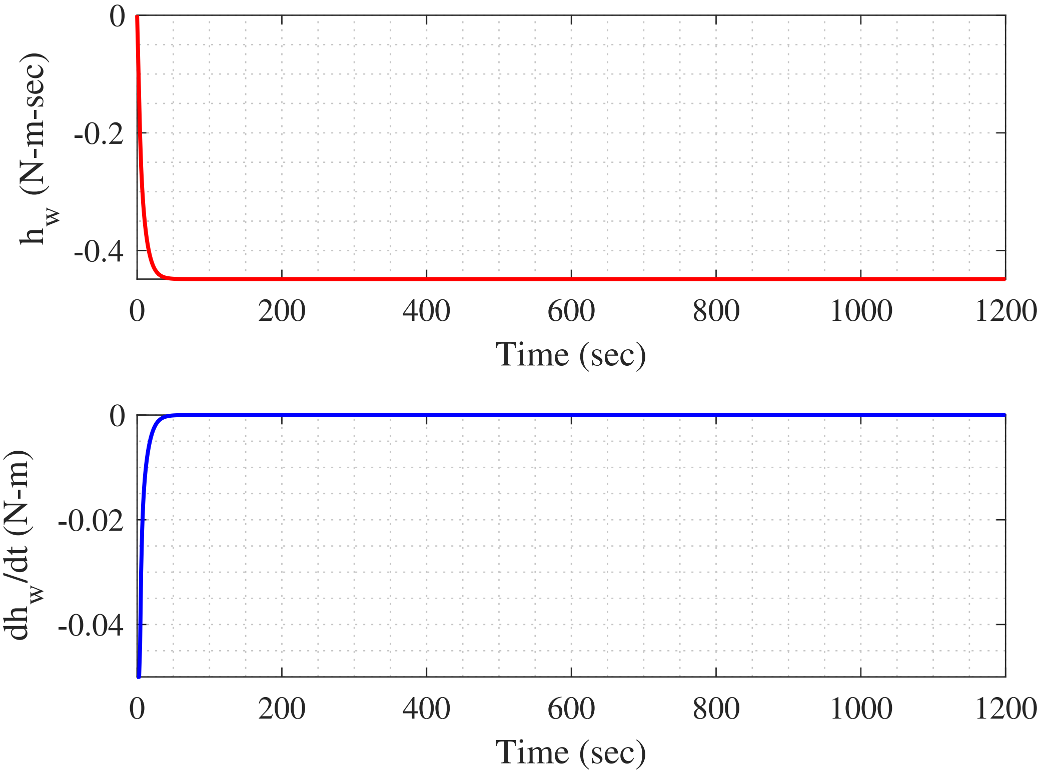

圖 12：反應輪的角動量及力矩響應圖 (Case B: $I_G = [12, 7, 10]$)。

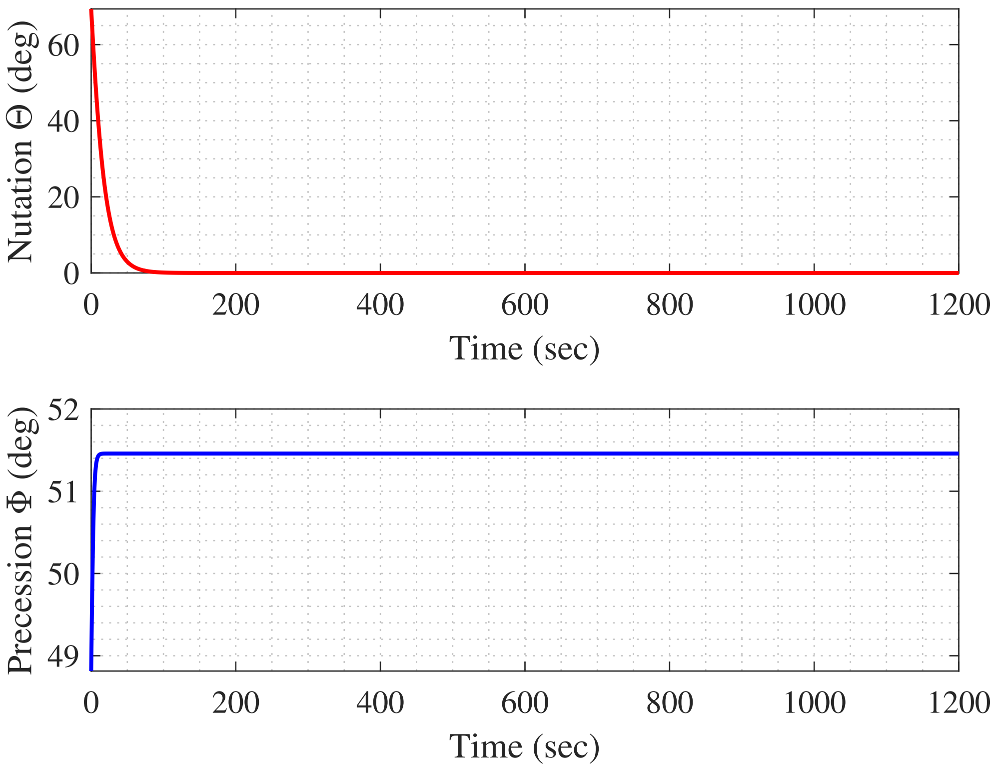

圖 13：章動角及進動角響應圖 (Case B: $I_G = [12, 7, 10]$)。

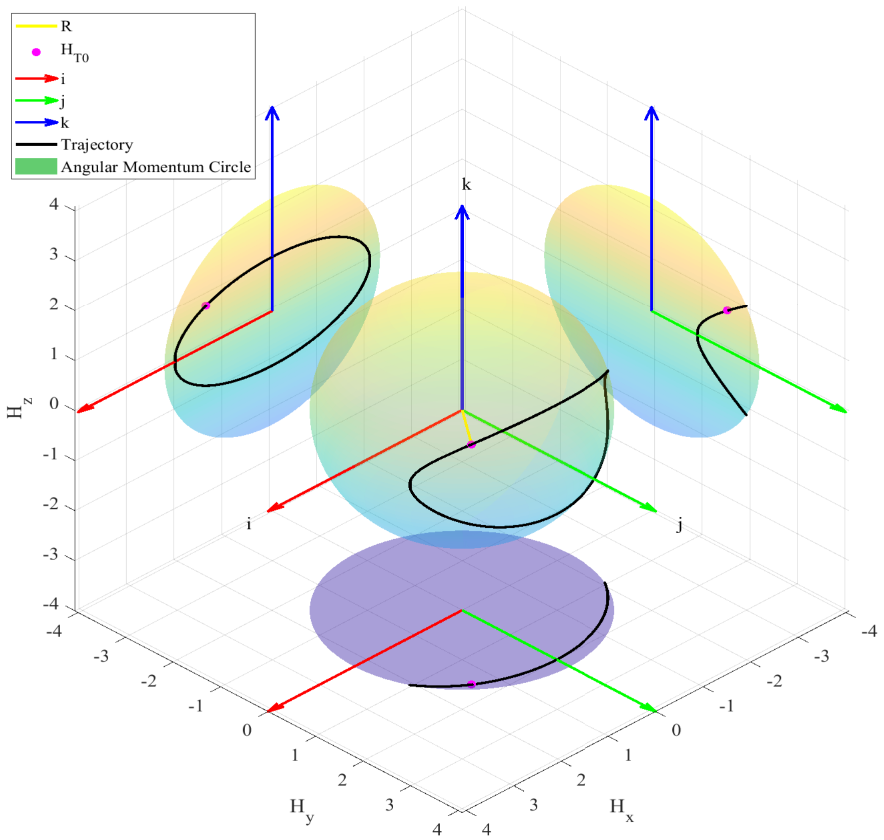

圖 14：開迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。軌跡的旋轉方向是沿 $+j$ 方向。

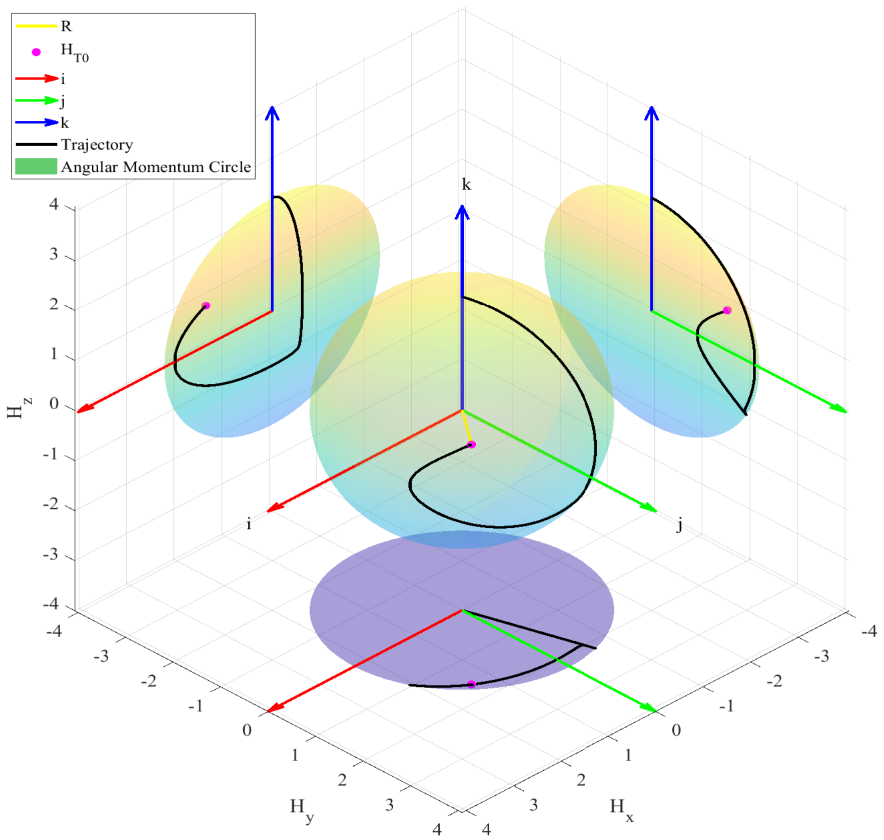

圖 15：閉迴路角動量三維軌跡圖及二維投影 (Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。

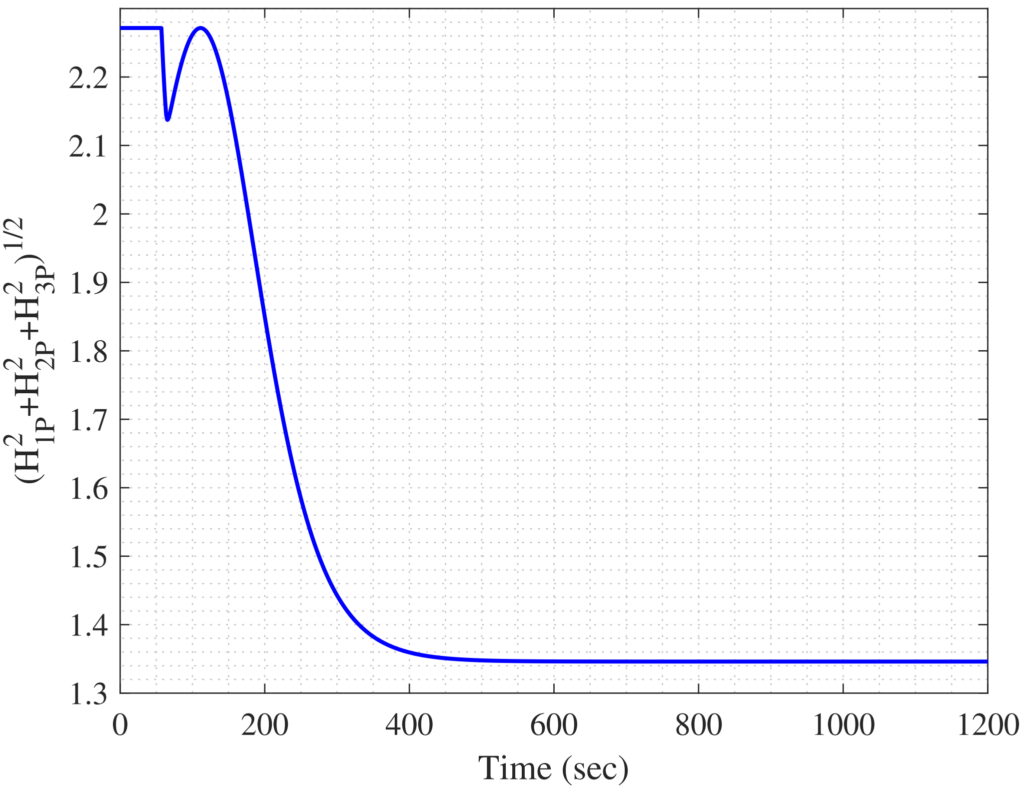

圖 16：太空船 (不含反應輪) 之角動量大小響應圖。(Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。

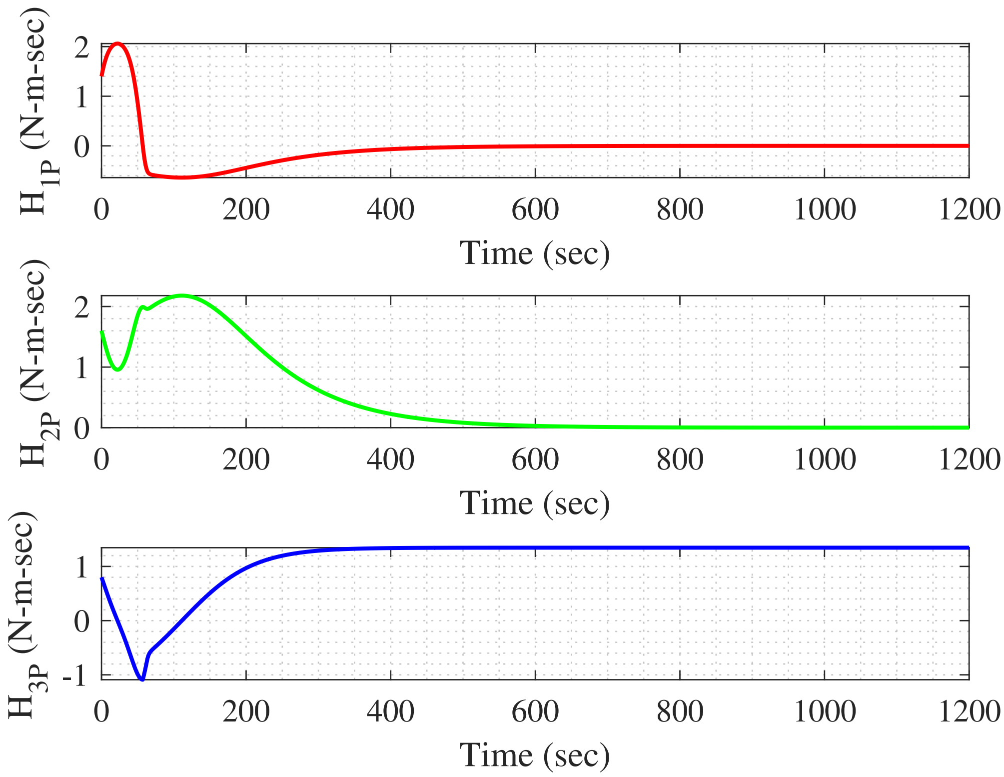

圖 17：太空船的角動量響應圖 (Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。

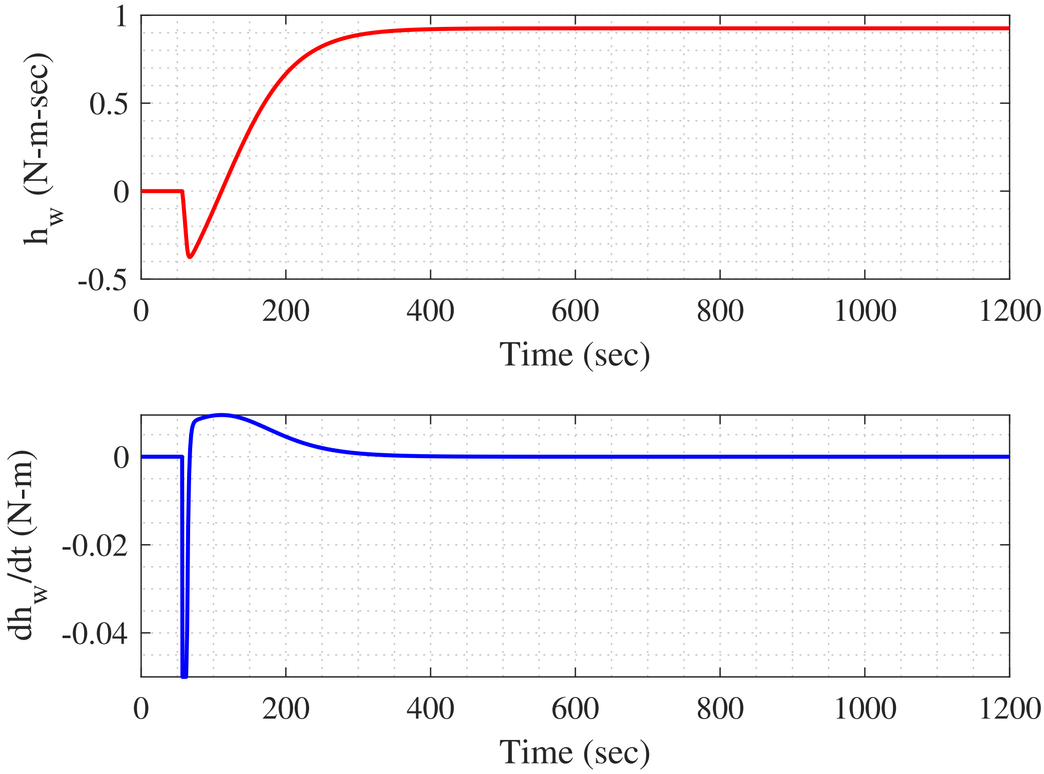

圖 18：反應輪的角動量及力矩響應圖 (Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。

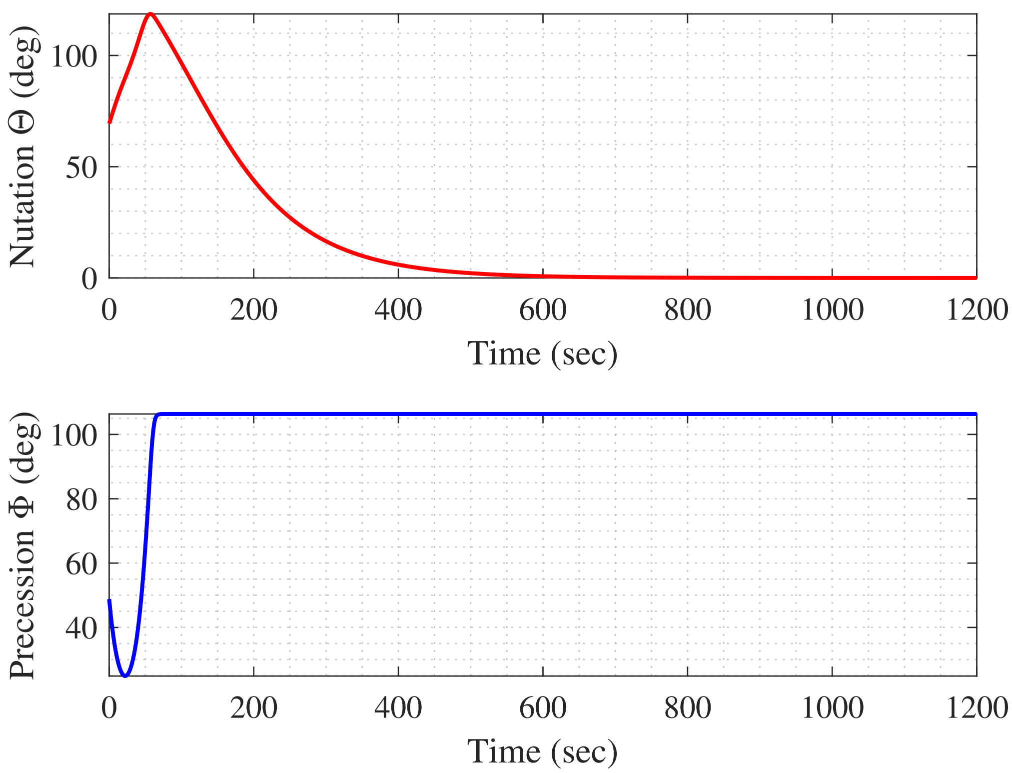

圖 19：章動角及進動角響應圖 (Case C: $I_G = [10, 12, 7]$)。

表 1：模擬結果的整理。

Case	Final angular momentum (N-m-sec)	$\lvert h_w \rvert / H_T$	Converge time (sec)
A	$H_{1P} = 1.48 \times 10^{-9}$ $H_{2P} = 5.28 \times 10^{-10}$ $H_{3P} = 3.76$ $h_w = -1.49$	0.66	180
B	$H_{1P} = 8.89 \times 10^{-35}$ $H_{2P} = 1.12 \times 10^{-34}$ $H_{3P} = 2.72$ $h_w = -0.45$	0.20	120
C	$H_{1P} = -1.86 \times 10^{-5}$ $H_{2P} = 6.34 \times 10^{-5}$ $H_{3P} = 1.35$ $h_w = 0.93$	0.41	400

5 結論

在這次專題當中，推導了以角動量表示的姿態方程式，並且考慮了單反應輪機構作為致動器設計。對於這組動態方程，在 Lyapunov 觀念下的穩定性分析亦有提供，根據所得到的穩定性條件，以回授線性化的控制設計來使得閉迴路之進動模態呈現簡單的阻尼運動，並使其滿足穩定性條件。當穩定性條件被滿足，系統即會自然地收斂而不須外加控制，直到所有的角動量被轉移到 k 軸。而對於數組不同轉動慣量的情況，吾人藉由模擬結果推論出開迴路系統之行為模式，並且驗證了反應輪控制律的可行性。此外，基於四元數的姿態追蹤控制，冗餘反應輪的動態構型分析，甚至是考慮具有外在擾動以及模型不確定性之強健控制律設計，吾人將其作為未來的研究方向。

參考文獻

[1] Yiing-Yuh Lin and Chin-Tzuo Wang. Detumbling of a rigid spacecraft via torque wheel assisted gyroscopic motion. *Acta Astronautica*, 93:1–12, 2014.